Grupo pleno topológico asociado a un sistema minimal de Cantor.

9 de octubre de 2015

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Sistemas dinámicos topológicos

En estas notas, un **sistema dinámico** será una acción T de un grupo numerable e infinito G sobre un espacio X. Es decir, $T : G \times X \to X$ es una función que verifica las siguientes dos propiedades:

1. $T(1_G, x) = x$, para todo $x \in X$ y donde 1_G es el neutro del grupo G.
2. $T(g, T(h, x)) = T(gh, x)$ para todo $x \in X$ y $g, h \in G$.

A este sistema dinámico lo denotaremos como (X, T, G).
Para cada $g \in G$, la función $T(g, \cdot) : X \to X$ la escribiremos como $T^g : X \to X$. De esta forma, al ser T una acción tendremos que $T^g \circ T^h = T^{gh}$, para todo $g, h \in G$.
La **órbita** de $x \in X$ es el conjunto

$$O_T(x) = \{T^g(x) : g \in G\}.$$

Observación 1 *Cuando $G = \mathbb{Z}$, la función T^n es la composición n veces de la función T^1. De esta forma, es natural denotar al sistema dinámico por (X, T^1) o simplemente como (X, T), donde T será en este caso T^1. Observar que toda función biyectiva $T : X \to X$ define una acción de $\mathbb{Z}$ y viceversa.*

Definición 1 *Sea (X, T, G) un sistema dinámico. Se dice que*

- *El sistema o la acción T es* **libre** *si $T^g(x) = x$ implica que $g = 1_G$.*
- *El sistema o la acción T es* **efectiva** *si $T^g = id$ implica que $g = 1_G$.*

Para estudiar cualquier objeto en matemática hay que asignarle una cierta estructura. Los sistemas dinámicos que aquí estudiaremos tendrán estructura de espacio métrico.

Definición 2 *Un* **sistema dinámico topológico** *es un sistema dinámico (X, T, G) tal que X es un espacio métrico compacto y para cada $g \in G$ la función $T^g : X \to X$ es un homeomorfismo.*

Definición 3 *Sean (X, T, G) e (Y, S, G) dos sistemas dinámicos topológicos. Se dice que (Y, S, G) es un* **factor** *de (X, T, G) si existe una función continua y sobreyectiva $\phi : X \to Y$ verificando $\phi(T^g(x)) = S^g(\phi(x))$, para todo $x \in X$ y $g \in G$. Cuando la función ϕ es además inyectiva, se dice que ambos sistemas son* **conjugados** *y a la función ϕ se le llama* **conjugación**.

Ejemplo 1: Rotaciones sobre el círculo.

Consideraremos $G = \mathbb{Z}$ y $X = S^1 = \{\exp(2i\pi x) : x \in \mathbb{R}\}$ o $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (Por qué da igual tomar un espacio o el otro?). Para $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos la siguiente transformación $T_\alpha : S^1\ S^1$ dada por $T_\alpha(\exp(2i\pi x)) = \exp(2i\pi(x+\alpha))$.

Ejemplo 2: Full G-shift.

Sea G un grupo numerable e infinito. Consideramos

$$X = \{0,1\}^G = \{x = (x(g))_{g\in G} : x(g) \in \{0,1\},\ \text{para todo } g \in G\}.$$

La acción shift de G sobre X se define como

$$T^h((x(g))_{g\in G}) = x(h^{-1}g)_{g\in G},\ \text{para todo } h \in G \text{ y } (x(g))_{g\in G} \in X.$$

Al equipar a $\{0,1\}$ con la topología discreta, y luego a $\{0,1\}^G$ con la topología producto, obtenemos que X es compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados (un Cantor). Con esta topología sobre x, el sistema (X,T,G) es un sistema dinámico topológico.

1.1.1. Grupos residualmente finitos

Se dice que un subgrupo Γ de G tiene **índice finito** si $|G/\Gamma| = [G:\Gamma] < \infty$.

Definición 4 *El grupo G es* **residualmente finito** *si para todo $g \in G\setminus\{1_G\}$ existe un grupo finito F y un homomorfismo sobreyectivo $\phi : G \to F$ tal que $\phi(g) \neq 1_F$.*

Ejercicio 1 *Probar que los siguientes grupos son residualmente finitos: grupos finitos, $\mathbb{Z}^n$, $GL(n,\mathbb{Z})$. Pruebe que $\mathbb{Q}$ no es residualmente finito.*

Lema 1 *Sea H un subgrupo de índice finito de G. Entonces existe K normal en G tal que $K \subseteq H$ y de índice finito en G.*

Demostración: Consideremos Γ el grupo de permutaciones en G/H. Definimos para cada $g \in G$ el elemento $\sigma_g \in \Gamma$ dado por

$$\sigma_g(kH) = gkH,\ \text{para todo } k \in G.$$

Observar que $\phi : G \to \Gamma$ tal que $\phi(g) = \sigma_g$ está bien definida y es un homomorfismo. Además $Ker(\phi)$ está contenido en H, es normal en G, y $G/Ker(\phi)$ es isomorfo a un subgrupo de Γ (finito). Esto muestra que $K = Ker(\phi)$ es el subgrupo que buscamos. □

Proposición 1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es residualmente finito.*
2. *Existe una sucesión $(G_n)_{n\geq 0}$ de subgrupos normales de índice finito de G tales que $\bigcap_{n\geq 0} G_n = \{1_G\}$.*
3. *Existe una sucesión $(G_n)_{n\geq 0}$ de subgrupos de índice finito de G, no necesariamente normales, tales que $\bigcap_{n\geq 0} G_n = \{1_G\}$.*

Demostración: (1. $\Rightarrow$ 2.) Supongamos que G es residualmente finito. Como es numerables, podemos enumerar sus elementos de alguna forma. Digamos $G = \{1_G, g_1, g_2, \cdots, \}$. Para cada $n \geq 1$, existe un grupo finito F_n y un homomorfismo $\phi_n : G \to F_n$ tal que $\phi_n(g_n) \neq 1_{F_n}$. Para cada $n \geq 0$, consideremos el grupo finito $\Gamma_n = F_1 \times \cdots \times F_n$, y el homomorfismo $f_n = \phi_1 \times \cdots \times \phi_n : G \to \Gamma_n$. Tomando $G_n = Ker(f_n)$ tenemos que G_n es normal en G, de ídice finito, y además $G_{n+1} \subseteq G_n$. Por otro lado, ya que para todo $g \in G \setminus \{1_G\}$ existe n tal que $\phi_n(g) \neq 1_{F_n}$, tenemos que $\bigcap_{n\geq 0} G_n = \{1_G\}$.
(2. $\Rightarrow$ 3.) es trivial.
(3. $\Rightarrow$ 2.) Se obtiene gracias al Lema 1.
(2. $\Rightarrow$ 1.) Para $g \in G$ tomar n tal que $g \notin G_n$. Luego, la epiyección canónica $\phi : G \to G/G_n$ verifica $\phi(g) \neq 1_{G/G_n}$. $\square$

Ejemplo 3: Subodometros y odometros.

Sea $(G_n)_{n\geq 0}$ una sucesión decreciente de subgrupos de índice finito de G, no necesariamente normales. Para todo $n \geq 0$ la función $\pi_n : G/G_{n+1} \to G/G_n$ dada por $\pi_n(gG_{n+1}) = gG_n$ está bien definida y es sobreyectiva (si los subgrupos G_n's son normales, entonces es además un homomorfismo). Podemos entonces definir el siguiente **límite inverso**:

$$X = \varprojlim_{n}(G_n, \pi_n) = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} G/G_n : \pi_n(x_{n+1}) = x_n, \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Equipando a cada G/G_n de la topología discreta, y luego a $\prod_{n\geq 0} G/G_n$ de la topología producto, obtenemos que $\prod_{n\geq 0} G/G_n$ es compacto y que X es uns subconjunto cerrado (y entonces compacto) de $\prod_{n\geq 0} G/G_n$.
Definimos $T : G \times X \to X$ como $T^g((x_n)_{n\geq 0}) = (gx_n)_{n\geq 0}$, para todo $(x_n)_{n\geq 0} \in X$ y $g \in G$.
Al sistema (X, T, G) se lo conoce como **subodometro**. En el caso de que los subgrupos $(G_n)_{n\geq 0}$ sean normales, entonces se dice que (X, T, G) es un **odometro**.
No es difícil ver que todo subodometro es factor de un odometro (ver [5]). Observar que subodometros y odometros no necesariamente son libres, estos últimos lo son si y sólo si $\bigcap_{n\geq 0} G_n = \{1_G\}$. La existencia de una sucesión de subgrupos con estas carectísticas sólo es posible si el grupo G es **residualmente finito**.

Definición 5 *Decimos que un sistema dinámico topológico* (X, T, G) *es* **minimal** *si para todo* $x \in X$*, la órbita* $O_T(x)$ *es densa en* X*. En el Ejercicio 2, encontramos otras formas equivalentes de definir minimalidad.*

Ejercicio 2 *Sea* (X, T, G) *un sistema dinámico topológico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (X, T, G) *es minimal.*
2. *Supongamos que* $G = \mathbb{Z}$*. Para cada* $x \in X$*, la órbita positiva* $O_T^+(x) = \{T^n(x) : n \geq 0\}$ *es densa en* X*.*
3. *Si* Z *es un subconjunto cerrado y no vacío de* X *tal que* $T^g(Z) \subseteq Z$ *para todo* $g \in G$*, entonces* $Z = X$*.*

Ejercicio 3 *Probar lo siguiente:*

1. *La rotación sobre el círculo* (X, T_α) *es minimal si y sólo si* α *es irracional.*
2. *Los subodometros son minimales.*
3. *Qué sucede con el Full* G*-shift?*

De acuerdo al punto 3. del Ejercicio 2, los sistemas minimales son exactamento aquellos que no poseen subsistemas dinámicos topológicos, más allá de ellos mismos. Serían por lo tanto los más *pequeños*. Por otro lado, todo sistema dinámico topológico posee subsistemas que son minimales, como lo muestra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4 *Sea* (X, T, G) *un sistema dinámico topológico cualquiera. Es decir,* X *es un espacio métrico compacto y* $T : G \times X \to X$ *es una acción de* G *sobre* X *por homeomorfismos. Usando el Lema de Zorn, pruebe que* X *posee un subconjunto minimal. Es decir, un subconjunto cerrado y no vacío* Y *de* X *tal que* $T^g(Y) = Y$ *para todo* $g \in G$*, y tal que si* $Z \subseteq Y$ *es no vacío y cerrado verificando* $T^g(Z) \subseteq Z$ *para todo* $g \in G$*, entonces* $Z = Y$*.*

Del Ejercicio 4 deducimos que si (X, T, G) no es minimal, siempre podremos encontrar un subsistema de (X, T, G) que sí lo es.

Capítulo 2

Grupos plenos y su conexión con dinámica

En esta sección definiremos los conceptos de grupo pleno y grupo pleno topológico asociado a un sistema dinámico topológico minimal (X, T, G). Asumiremos siempre que el sistema es minimal y **libre**. Esto último significa que si $g \in G$ es tal que $T^g(x) = x$ para algún $x \in X$, entonces $g = 1_G$. Observar que en el caso $G = \mathbb{Z}$, el sistema es libre si y sólo si no posee puntos periódicos.

Consideremos $Hom(X)$ como el conjunto de todos los homeomorfismos $f : X \to X$. Con la composición de funciones, $Hom(X)$ es un grupo.

Definición 6 *El* **grupo pleno** *asociado a (X, T, G) es el subgrupo $[T]$ de $Hom(X)$ definido como*

$$[T] = \{f \in Hom(X) : \text{ para cada } x \in X, \text{ existe } g \in G \text{ tal que } f(x) = T^g(x)\}.$$

Ya que para cada $g \in G$ el homeomorfismo T^g está en $[T]$, el grupo $[T]$ posee un subgrupo isomorfo a G. El grupo pleno es en general mucho más grande, complicado y difícil de describir que G. Sin embargo, posee un subgrupo que es un poco más abordable. Para definirlo, observar que el hecho de que la acción T sea libre, nos permite definir la siguiente función:

$$n : [T] \times X \to G \text{ tal que } f(x) = T^{n(f,x)}(x), \text{ para todo } x \in X \text{ y } f \in [T].$$

Definición 7 *El* **grupo pleno topológico** *de (X, T, G) es el subgrupo $[[T]]$ de $[T]$ que consiste de todos los homeomorfismo f en $[T]$ para los que la función $n(f, \cdot) : X \to G$ es continua (consideramos a G equipado de la topología discreta).*

Observar que para cada $g \in G$ se tiene que T^g está contenido en $[[T]]$, pues $n(T^g, \cdot)$ es la función constante igual a g. De esta forma, se tiene la siguiente relación

$$G \subseteq [[T]] \subseteq [T].$$

El siguiente resultado nos entrega una nueva caracterizacin de los elementos de $[[T]]$.

Proposición 2 *Sea $f \in Hom(X)$. Se tiene que $f \in [[T]]$ si y sólo si existe una partición finita de X formada por conjuntos abiertos y cerrados $A_1, \cdots, A_l$ tales que para todo $1 \leq i \leq l$ existe $g_i \in G$ tal que $f(x) = T^{g_i}(x)$ para todo $x \in A_i$.*

Demostración: Cuando hablamos de continuidad de $n(f,\cdot)$ estamos asumiendo que G está equipado de la topología discreta, es decir, aquella en que todos sus subconjuntos son abiertos. Luego, los únicos compactos en G son sus subconjunto finitos. Entonces si asumimos que $n(f,\cdot)$ es continua, dado que X es compacto, $n(f,X)$ debe ser finito. Digamos $n(f,X)=\{g_1,\cdots,g_l\}$. Por otro lado, como para cada $1\leq i\leq l$ el conjunto $\{g_i\}$ es abierto y cerrado en G, su pre imagen $A_i=n(f,\cdot)^{-1}(\{g_i\})$ es un abierto y cerrado en X. Lo anterior implica que la colección $\{A_1,\cdots,A_l\}$ es una partición finita de X formada por conjunto abiertos y cerrados que además verifican $f|_{A_i}=T^{g_i}$, para cada $1\leq i\leq l$.
Por otro lado, la recíproca implica que $n(f,x)=g_i$ si y sólo si $x\in A_i$. Luego, $n(f,\cdot)$ es continua. □

Observación 2 *De la Proposición 2 deducimos que si X es conexo, entonces $[[T]]$ es isomorfo a G.*

2.1. Ejemplo: grupo pleno topológico de un sistema equicontinuo.

Un sistema dinámico topológico (X,T,G) es **equicontinuo**, si la familia de funciones $\{T^g: g\in G\}$ es equicontinua. Es decir, si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $d(x,y)<\delta$ entonces $d(T^g(x),T^g(y))<\varepsilon$, para todo $g\in G$. Todo sistema equicontinuo cuyo espacio de fase es un Cantor, es conjugado a un **subodometro** (ver [4]). De hecho, en [4] se muestra que G admite una acción efectiva y equicontinua sobre el Cantor si y sólo si G es residualmente finito.
Sea (X,T,G) un sistema minimal equicontinuo libre. Por lo mencionado en la sección anterior, podemos asumir que (X,T,G) es un subodometro. Sea $(G_n)_{n\geq 0}$ una sucesión decreciente de subgrupos de índice finito de G tales que $X=\text{lím}(G/G_n,\pi_n)$.
Para cada $n\geq 0$, sea C_n el subconjunto de los $x=(x_k)_{k\geq 0}\in X$ tal que x_n es igual a la clase de 1_G en G/G_n (es decir, G_n). Es fácil ver que la colección $\mathcal{P}_n=\{T^g(C_n): g\in F_n\}$ es una partición abierta-cerrada de X, donde F_n algún conjunto de representantes de G/Γ_n que contiene a 1_G. Observar que $T^g(C_n)=T^hC_n$ si y sólo si $g\in hG_n$, lo que implica que la partición es independiente del conjunto F_n que se escoge. Además, $\mathcal{P}_{n+1}$ es más fina que $\mathcal{P}_n$.

Ejercicio 5 *Verificar que la colección de conjuntos $\{T^g(C_n): g\in F_n, n\geq 0\}$ es una base para la topología de X. Es decir, que para todo $x\in X$ y todo abierto U de X que contiene a x, existen $n\geq 0$ y $g\in F_n$ tal que $x\in T^g(C_n)\subseteq U$.*

El Ejercicio 5 implica que todo abierto A de X se escribe como unión de conjuntos de la forma $T^g(C_n)$. Si además A es abierto cerrado, entonces la compacidad implica que esta unión es finita. Lo anterior junto al hecho de que los conjuntos de $\mathcal{P}_n$ se escriban como unión de conjuntos de $\mathcal{P}_m$, para todo $m\geq n$, implica que para todo abierto cerrado $A\subseteq X$, existen n≥ 0 y $g_1,\cdots,g_l\in F_n$ tales que $A=T^{g_1}C_n\cup\cdots\cup T^{g_l}(C_n)$. A partir de esto deducimos que si f es un elemento de $[[T]]$, entonces existen $n\geq 0$ y $h_g\in G$, para cada $g\in F_n$, tales que $f|_{T^g(C_n)}=T^{h_g}$. Es decir, $f\in[[T]]_n$, donde

$$[[T]]_n=\{f\in Hom(X):\ \text{para cada } g\in F_n \text{ existen } h_g\in G \text{ tales que } f|_{T^g(C_n)}=T^{h_g}\}.$$

Hemos probado que

$$[[T]] = \bigcup_{n\geq 0} [[T]]_n. \tag{2.1.1}$$

Observar que a ser $\mathcal{P}_{n+1}$ más fina que $\mathcal{P}_n$, tenemos que $[[T]]_n \subseteq [[T]]_{n+1}$. Llamaremos $\tau_n : [[T]]_n \to [[T]]_{n+1}$ a la función inclusión.

Ejercicio 6 *Probar que $[[T]]_n$ es un subgrupo de $[[T]]$.*

A partir del Ejercicio 6 y de la ecuación (2.1.1) deducimos que $[[T]]$ es isomorfo al límite directo.

En lo que sigue, estudiaremos la estructura de los grupos $[[T]]_n$. Para esto, sea p un entero positivo y sea S_p el grupo de permutaciones de p elementos.

Proposición 3 *Sea (X,T,G) un odometro libre definido por la sucesión $(G_n)_{n\geq 0}$ de subgrupos normales de G.*
(1) El grupo $[[T]]_n$ es isomorfo a un producto semidirecto $G_n^{[G:G_n]} \rtimes S_{[G:G_n]}$.
(2) El grupo pleno topológico $[[T]]$ es isomorfo a un límite directo

$$\varinjlim (G_n^{[G:G_n]} \rtimes S_{[G:G_n]}, \tau_n).$$

Demostración: Sea $\{\mathcal{P}_n = T^g(C_n) : g \in F_n\}$ como arriba, y sea $f \in [[T]]_n$. Luego para cada $a \in F_n$ existe $g_a \in G$ tal que $f|_{T^a(C_n)} = T^{g_a}$. Sea $\sigma_f(a) \in F_n$ tal que $g_a a \in \sigma_f(a) G_n$. Entonces para cada $a \in F_n$ tenemos que

$$f(T^a(C_n)) = T^{g_a a}(C_n) = T^{\sigma_f(a)}(C_n).$$

Ya que f es un homeomorfismo, la función $\sigma_f : F_n \to F_n$ está en $S_[G : G_n]$. Si $\gamma_f(a) \in G_n$ es tal que $g_a a = \sigma_f(a)\gamma_f(a)$, entonces la función $\phi : [[T]]_n \to G_n^{[G:G_n]} \rtimes S_{[G:G_n]}$ definida por $\phi(f) = ((\gamma_f(a))_{a\in F_n}, \sigma_f)$ es una biyección (**Ejercicio!**).
Observar que para $f, h \in [[T]]_n$ tenemos que $\phi(f \circ h) = (\sigma_f \circ \sigma_h, (\gamma_f(\sigma_h(a))\gamma_h(a))_{a\in F_n})$, lo que demuestra que $[[T]]_n$ es isomorfo a $G_n^{[G:G_n]} \rtimes S_{[G:G_n]}$, entendiendo este último grupo con la operación

$$(\sigma, (\gamma(a))_{a\in F_n})(\tau, (\alpha(a))_{a\in F_n}) = (\sigma \circ \tau, (\gamma(\tau(a))\alpha(a))_{a\in F_n}).$$

La segunda parte es inmediata de (2.1.1). □

2.2. Equivalencia orbital.

¿Qué significa que dos sistemas minimales sobre el Cantor tengan grupos plenos topológicos isomorfos? ¿Qué propiedades dinámicas se pueden recuperar a partir del grupo pleno? Son preguntas naturales a formular cuando se le asocian estos objetos a un sistema dinámico.
Los grupos plenos están asociados a la noción de equivalencia orbital que definiremos a continuación.

Definición 8 *Sean (X,T,G) e (Y,S,Γ) dos sistemas dinámicos topológicos. Se dice que ambos sistemas son (topológicamente)** **orbitalmente equivalentes** *si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(O_T(x)) = O_S(h(x))$, para todo $x \in X$.*

*La noción original de equivalencia orbital es para sistemas medibles.

Ejercicio 7 *Sean* (X, T, G) *e* (Y, S, Γ) *dos sistemas dinámicos topológicos libres que son orbitalmente equivalentes. Si* X *(y entonces* Y*) es conexo, entonces existe un isomorfismo* $\phi : G \to \Gamma$ *y un homeomorfismo* $h : X \to Y$ *tal que para todo* $g \in G$ *y todo* $x \in X$ *se tiene que* $h(T^g(x)) = S^{\phi(g)}(h(x))$*. En otras palabras, cuando los espacios de fase son conexos y los sistemas dinámicos son libres, la equivalencia orbital coincide con la noción de isomorfismo entre sistemas dinámicos.*

De acuerdo al Ejercicio 7, es natural restringir el estudio de la equivalencia orbital al caso cuando los espacios de fase son un Cantor.

Sean (X, T, G) e (Y, S, Γ) dos sistemas minimales de Cantor libres, orbitalmente equivalentes mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Observar que al ser las acciones libres, podemos definir la función

$$f : G \times X \to \Gamma \text{ tal que } h(T^g(x)) = S^{f(g,x)}(h(x)), \text{ para todo } x \in X \text{ y } g \in G.$$

Definición 9 *Sean* (X, T, G) *e* (Y, S, Γ) *dos sistemas dinámicos topológicos libres. Se dice que son* **continuamente orbitalmente equivalentes***, si son orbitalmente equivalentes y si* $f(g, \cdot) : X \to \Gamma$ *es continua, para todo* $g \in G$*, donde* $f : G \times X \to \Gamma$ *es la función definida más arriba.*

El siguiente resultado es crucial para relacionar los grupos plenos con la equivalencia orbital. Para la demostración, mirar [11] escrito por Medynets.

Teorema 1 *Sean* (X, T, G) *e* (Y, S, Γ) *dos sistemas minimales de Cantor libres, tales que existe un isomorfismo* $\phi : [[T]] \to [[S]]$ *(resp.* $\phi : [T] \to [S]$*). Entonces existe un homeomorfismo* $h : X \to Y$ *tal que para todo* $f \in [[T]]$ *(resp.* $f \in [T]$*) se tiene que* $h \circ f = \phi(f) \circ h$*.*

El siguiente resultado fue demostrado para el caso $G = \Gamma = \mathbb{Z}$ en [6] por Giordano, Putnam y Skau. A partir del Teorema 1, se puede generalizar a acciones de grupos como en el siguiente corolario.

Corolario 1 *Sean* (X, T, G) *e* (Y, G, Γ) *dos sistemas minimales de Cantor libres. Se tiene lo siguiente:*

1. $[T]$ *y* $[S]$ *son isomorfos si y sólo si* (X, T, G) *e* (Y, S, Γ) *son orbitalmente equivalentes.*
2. $[[T]]$ *y* $[[S]]$ *son isomorfos si y sólo si* (X, T, G) *e* (Y, S, Γ) *son continuamente orbitalmente equivalentes.*

Definición 10 *Sean* (X, T) *e* (Y, S) *dos sistemas minimales de Cantor dados por acciones de* $\mathbb{Z}$ *(es decir,* T *y* S *son los homeomorfismos que genera la acción de del* 1*). Se dice ambos sistemas son* **flip conjugados**

En su tesis de doctorado, Boyle [1] demostró que para acciones de $\mathbb{Z}$, la equivalencia orbital continua era equivalente a la noción de **flip conjugación**. Es decir, dos sistemas minimales de Cantor (X, T) e (Y, S) son continuamente orbitalmente equivalentes si y sólo si (X, T) es conjugado a (Y, S) o a (Y, S^{-1}).

Capítulo 3

Simplicidad del conmutador del grupo pleno topológico.

Este capítulo se basa en las notas escritas por K. Juschenko [9] y en el artículo de S. Bezuglyi y K. Medynets [3].

Definición 11 *Sea G un grupo. Recordemos que el subgrupo* **conmutador** *de G es el subgrupo G' de G generado por los elementos*

$$[f,g] = fgf^{-1}g^{-1}, \text{ con } f,g \in G.$$

Ejercicio 8 *Probar que G' es normal en G y que G/G' es abeliano. Además, G' es el subgrupo más pequeño de G con esta propiedad.*

Sea (X,T) un sistema minimal de Cantor y sea $\mathcal{M}(X)$ el espacio de las medidas de probabilidad definidas sobre los Borelianos de X. Recordar que este es un espacio compacto y metrizable dotado de la topología débil *. En este contexto, una sucesión de medidas $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}(X)$ converge a $\mu \in \mathcal{M}$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu, \text{ para todo } f \in C(X),$$

con $C(X)$ el espacio de las funciones continuas de X a valores complejos. La compacidad de $\mathcal{M}(X)$ implica que toda sucesión en $\mathcal{M}(X)$ posee subsucesiones convergentes, punto crucial para demostrar la existencia de medidas invariantes. Llamamos $\mathcal{M}(X,T)$ al conjunto de todas las medidas μ de $\mathcal{M}(X)$ que son T-invariantes, es decir, las medidas $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tales que $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ para todo Boreliano A de X.

Ejercicio 9 *Sean $A,B \subseteq X$ conjuntos abiertos cerrados tales que $\mu(B) < \mu(A)$ para toda $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, y sea $f = 1_A - 1_B$.*

1. *Pruebe que existe $c > 0$ tal que*

$$\inf\{\int f d\mu : \mu \in \mathcal{M}(X,T)\} > c.$$

2. *Pruebe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ y $x \in X$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T(x)) > c$$

Teorema 2 *(Glasner-Weiss [8]) Sean $A, B \subseteq X$ conjuntos abiertos cerrados tales que $\mu(B) < \mu(A)$ para toda $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. Entonces existe $g \in [[T]]$ con $g(B) \subseteq A$ y $g^2 = id$.*

Demostración: Sean $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ como en el Ejercicio 9. Sea $D \subseteq X$ un conjunto abierto cerrado tal que los tiempos de retorno a D son mayores que n_0. Sea $\mathcal{P} = \{T^j(D_i) : 0 \leq j < h_i, 1 \leq i \leq N\}$ una partición de Kakutani-Rohlin sobre D más fina que la partición $\{A \setminus B, B \setminus A, A \cap B, (A \cup B)^c\}$. Por hipótesis, cada h_i es mayor que n_0, y por lo tanto, para cada torre de la partición $\mathcal{P}$, el número de conjuntos de la torre que están completamente contenidos en A es mayor que el número de conjuntos que están contenidos en B. Para cada $1 \leq i \leq N$, sean $0 \leq j_{i,1} < \cdots < j_{i,l_i} < h_i$ los $j's$ tales que $T^j(D_i) \subseteq B$. Por cada $j_{i,k}$ existe un $0 \leq s_{i,k} < h_i$ tal que $T^{s_{i,k}}(D_i) \subseteq A$. Definiendo

$$g_{i,k}(x) = \begin{cases} T^{s_{i,k}-j_{i,k}}(x) & \text{si } x \in T^{j_{i,k}}(D_i) \\ T^{j_{i,k}-s_{i,k}}(x) & \text{si } x \in T^{s_{i,k}}(D_i) \\ x & \text{si no} \end{cases}$$

tenemos que $g = \prod_{i,k} g_{i,k}$ satisface lo deseado. □

Ejercicio 10 *Pruebe lo siguiente:*

1. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si el diámetro de un abierto cerrado A de X es menor que δ, entonces $\mu(A) < \varepsilon$, para todo $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$.*

2. *Si A es un abierto cerrado de X, entonces $\inf\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{M}(X,T)\} > 0$.*

Ejercicio 11 *Sea $f \in [[T]]$ y $X_n = \{x \in X : |O_f(x)| = n\}$. Pruebe que X_n es abierto cerrado y que existe un abierto cerrado $X_n^0 \subseteq X$ tal que*

$$X_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(X_n^0).$$

Lema 2 *Para cada $g \in [[T]]$ y $\delta > 0$ existen $g_1, \cdots, g_n \in [[T]]$ tales que $g = g_1 \cdots g_n$ y $\mu(\mathrm{sop}(g_i)) < \delta$, para todo $1 \leq i \leq n$ y $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$.*

Demostración: Supongamos que g es periódica, es decir, para todo $x \in X$ existe $n \geq 0$ tal que $g^n(x) = x$. Sea $\{n_i : i \in I\}$ el conjunto de períodos de g. El Ejercicio 11 implica que para cada $i \in I$ existe un abierto cerrado X_i^0 tal que X_i es la unión disjunta de los conjuntos $\{g^j(X_i) : 0 \leq j < n_i\}$. Luego

$$X = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j=0}^{n_i-1} g^i(X_i^0).$$

El Ejercicio 10 nos asegura que podemos particionar X_i^0 en conjuntos abiertos cerrados $\{X_{i,1}^0, \cdots, X_{i,m_i}^0\}$ tales que $\mu(X_{i,j}^0) < \delta/n_i$, para todo $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. Entonces, para $A_{i,j} = \bigcup_{l=0}^{n_i-1} g^l(X_{i,j}^0)$ tenemos que $\mu(A_{i,j}) < \delta$. Definiendo

$$g_{i,j}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A_{i,j} \\ x & \text{si no} \end{cases}$$

obtenemos que $\mathrm{sop}(g_{i,j}) = A_{i,j}$ tiene medida menor o igual a δ. Además, g es igual a la composición de las funciones $g_{i,j}$ (que conmutan entre sí), y estas pertenecen a $[[T]]$.
Supongamos que g no es periódica. Luego, para todo $k \geq 0$ el conjunto

$$O_{\geq k} = \{x \in X : |O_g(x)| \geq k\}$$

es no vacío. Sea $k > 0$ tal que $1/k < \delta$. El Ejercicio 11 implica que $\bigcup_{i=1}^{k-1} X_i$ es abierto cerrado. Como $O_{\geq k}$ es igual al complemento de $\bigcup_{i=1}^{k-1} X_i$, deducimos que $O_{\geq k}$ también es abierto cerrado.
Para cada $x \in O_{\geq k}$ posee una vecindad abierta cerrad $U_x \subseteq O_{\geq k}$ tal que $g^i(U_x) \cap U_x = \emptyset$, para todo $0 \leq i < k$. Por compacidad, existen $x_1, \cdots, x_n$ tal que $O_{\geq k}$ es la unión disjunta de los conjuntos $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$. Definiendo $B_1 = U_{x_1}$ y

$$B_{i+1} = B_i \cup U_{x_{i+1}} \setminus \bigcup_{l=-(k-1)}^{k-1} g^l(B_i), \text{ para } i < n,$$

obtenemos que $B = B_n$ es un subconjunto abierto cerrado de $O_{\geq 0}$ que satisface $g^l(B) \cap B = \emptyset$ para todo $1 \leq l < k$ y que intersecta cada órbita de $O_{\geq k}$ al menos una vez. Además, $\mu(B) \leq 1/k < \delta$ para toda $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$.
Ya que B intersecta cada g-órbita de los elementos de $O_{\geq k}$, tenemos que $O_{\geq k} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(B)$. Por compacidad, existe m tal que $O_{\geq k} = \bigcup_{n=0}^{m} G^n(B)$. Esto implica que $n_B(x) = \min\{n > 0 : g^n(x) \in B\}$ está bien definido para todo $x \in B$. Sea g_B definida por $g_B(x) = g^{n_B(x)}(x)$ si $x \in B$, $g_B(x) = x$ si $x \notin B$. Tenemos que $g_B^{-1} g \in [[T]]$ y es periódica. Como el soporte de g_B tiene medida menor o igual que δ, obtenemos el resultado a partir de lo demostrado para funciones periódicas. $\square$

Lema 3 *Para todo $f \in [[T]]'$ y $\delta > 0$ existen $g_1, \cdots, g_n, h_1, \cdots, h_m \in [[T]]$ tal que $\mu(\mathrm{sop}(g_i) \cup \mathrm{sop}(h_i)) < \delta$ para todo $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ y tal que f está en el subgrupo normal generado por $[g_i, h_j]$.*

Demostración: Sean $g, h \in [[T]]$ tales que $f = [g,h]$. Lema 2 implica que existen $g_1, \cdots, g_n$ y $h_1, \cdots, h_m$ en $[[T]]$ tales que $g = g_1 \cdots g_n$, $h = h_1 \cdots h_m$ y $\mu(\mathrm{sop}(g_i)), \mu(\mathrm{sop}(h_j)) < \delta/2$.
Sea H el subgrupo normal generado por los $[g_i, h_j]$. Verificando que

$$[g_1 g_2, h_i] = g_1 [g_2, h_i] g_1^{-1} [g_1, h_i] \text{ y } [g_j, h_1 h_2] = [g_j, h_1] h_1 [g_j, h_2] h_1^{-1},$$

obtenemos que $[g_1 g_2, h_i]$ y $[g_j, h_1 h_2]$ están en H. El resto sigue por inducción. $\square$

Lema 4 *Si A y B son subconjuntos abiertos cerrados de X tales que $3\mu(B) < \mu(A)$ para todo $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, entonces existe $f \in [[T]]'$ tal que $f(B) \subseteq A$*

Demostración: Ejercicio. $\square$

Teorema 3 *Sea* $\Gamma = [[T]]$ *o* $\Gamma = [[T]]'$. *Entonces para todo subgrupo normal no trivial* H *de* Γ*, se tiene que* Γ' *es subgrupo de* H*.*

Demostración: Sean g y h en Γ. Debemos mostrar que $[g, h] \in H$.
Sea $f \in H$, y sea E un subconjunto abierto cerrado tal que E y $f(E)$ son disjuntos. Por Ejercicio 10, existe $\delta > 0$ tal que

$$3\delta = \text{ínf}\{\mu(E) : \mu \in \mathcal{M}(X, T)\}.$$

Por Lemas 2 y 3, existen $g_1, \cdots, g_n, h_1, \cdots, h_m \in [[T]]$ tal que $\mu(\text{sop}(g_i) \cup \text{sop}(h_i)) < \delta$ para todo $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ y tal que $[g, h]$ están en el subgrupo normal generado por los $[g_i, h_j]$. Si probamos que este subgrupo está contenido en H, habremos demostrado el teorema.
Sean g' y h' en $[[T]]$ tales que $\mu(\text{sop}(g') \cup \text{sop}(h')) < \delta$. Definiendo $F = \text{sop}(g') \cup \text{sop}(h')$ tenemos que $3\mu(F) < \mu(E)$. Por Lema 4 existe $\alpha \in [[T]]'$ tal que $\alpha(F) \subseteq E$. Ya que H es normal tenemos que $q = \alpha^{-1} f \alpha \in H$. De esta forma,

$$\bar{h} = [h', q] = (h'\alpha^{-1} f \alpha h'^{-1})\alpha^{-1} f^{-1} \alpha$$

y $[g', \bar{h}]$ están en H.
Observar que $q(F) \cap F = \emptyset$. De esto sigue que g'^{-1} y $qh'^{-1}q^{-1}$ conmutan. Luego,

$$[g', \bar{h}] = g'(h'qh'^{-1}q^{-1})g'^{-1}(qh'q^{-1}h'{-}1) = [g', h'] \in H.$$

Como g' y h' son arbitrarios, deducimos que los $[g_i, h_j]$ están en H. $\square$

Corolario 2 $[[T]]'$ *es simple.*

Demostración: Aplicando el Teorema 3 a $\Gamma = [[T]]$ y $H = [[T]]''$, obtenemos que $[[T]]'$ es un subgrupo de $[[T]]''$, lo que implica que $[[T]]' = [[T]]''$. Sea H un subgrupo normal no trivial de $[[T]]'$. Aplicando el Teorema 3 a $\Gamma = [[T]]'$ y H obtenemos que $[[T]]' = [[T]]''$ es un subgrupo de H, lo que implica $[[T]]' = H$ y por lo tanto, $[[T]]'$ es simple. $\square$

Capítulo 4

Subshifts minimales y el grupo pleno topológico.

Este capítulo se basa en las notas escritas por K. Juschenko [9].
Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor (una acción de $\mathbb{Z}$ minimal sobre el Cantor X). Sea $U \subseteq X$ un conjunto-abierto cerrado de X tal que $T^{-1}(U), U$ y $T(U)$ son disjuntos (Por qué existe tal conjunto?).
Definimos $g_U, f_U : X \to X$ como

$$f_U(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in T^{-1}(U) \cup U \\ T^{-2}(x) & \text{si } x \in T(U) \\ x & \text{si no.} \end{cases}$$

y

$$g_U(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in T^{-1}(U) \\ T^{-1}(x) & \text{si } x \in U \\ x & \text{si no.} \end{cases}$$

Observar que f_U y g_U están en $[[T]]$. Tenemos que f_U envía $T^{-1}(U)$ a U, U a $T(U)$ y $T(U)$ a $T^{-1}(U)$, mientras que g_U intercambia $T^{-1}(U)$ con U. Podemos entonces identificar f_U y g_U con las permutaciones (231) y (213) respectivamente. De esto, facilmente se deduce que $f_U = [g_U, f_U]$, lo que implica que $f_U \in [[T]]'$.

Lema 5 *El subgrupo conmutador $[[T]]'$ de $[[T]]$ está generado por*

$$\mathcal{U} = \{f_U : U \subseteq X \text{ abierto-cerrado tal que } T^{-1}(U), U \text{ y } T(U) \text{ son disjuntos}\}.$$

Demostración: Sea H el subgrupo de $[[T]]$ generado por $\mathcal{U}$. Ya que los elementos de $\mathcal{U}$ están contenidos en $[[T]]'$, tenemos que H es un subgrupo de $[[T]]'$. Por otro lado, dada la simplicidad de $[[T]]'$, para demostrar que $H = [[T]]'$ basta probar que $H \triangleleft [[T]]$. Dado que cada elemento de $\mathcal{U}$ tiene orden 3, la normalidad de H será consecuencia de probar que si $g \in [[T]]$ es tal que $g^3 = id$, entonces $g \in H$.

Ejercicio 12 *Probar que si $g \in [[T]]$ es tal que $g^3 = id$, entonces existe un abierto cerrado A de X tal que A, $g(A)$ y $g^2(A)$ son disjuntos y $\mathrm{sop}(g) = A \cup g(A) \cup g^2(A)$.*

Sea $g \in [[T]]$ tal que $g^3 = id$. Sea $A \subseteq X$ el abierto cerrado del Ejercicio 12. Ya que $g \in [[T]]$, refinando particiones deducimos que existe $\{A_i\}_{i=1}^m$ una partición de conjuntos abiertos cerrados de A, enteros $k_1, \cdots, k_m$ y $l_1, \cdots, l_m$ tales que

$$g|_{A_i} = T^{k_i}, g|_{g(A_i)} = T^{l_i} \text{ y } g|_{g^2(A_i)} = T^{-(k_i+l_i)}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m.$$

Esto implica que $g = g_1 \circ \cdots \circ g_m$, donde g_i es la transformación descrita arriba. Podemos suponer entonces que

$$g|_A = T^k, g|_{g(A)} = T^l \text{ y } g|_{g^2(A)} = T^{-(k+l)}.$$

Ya que es posible particionar A por conjuntos abiertos cerrados $A_1, \cdots, A_n$ de manera que $T^j(A_i) \cap T^r(A_i) = \emptyset$ para todo $1 \leq i \neq r \leq k + l$, podemos suponer que esto se verifica para A. Luego, podemos identificar g con el ciclo $(kk + l0)$ del grupo de permutaciones S_{k+l+1}. Como estos ciclos están en el subgrupo alternante de S_{k+l+1}, que está generado por los ciclos de la forma $(i, i+1, i+2)$, deducimos que g está generado por los elementos de $\mathcal{U}$. $\square$

Lema 6 *Sean U y V dos subconjuntos abiertos cerrados de X. Entonces se tiene los siguiente:*

- *Si $T^2(V), T(V), V, T^{-1}(V), T^{-2}(V)$ son disjuntos, y $U \subseteq V$, entonces para $\tau_U = f_{T^{-1}(U)} f_{T(U)}$ se tiene que*
$$\tau_V f_U \tau_V^{-1} = f_{T(U)}, \quad \tau_V^{-1} f_U \tau_V = f_{T^{-1}(U)}.$$
- *Si $V, U, T^{-1}(U), T(U) \cup T^{-1}(V), T(V)$ son disjuntos, entonces*
$$[f_V, f_U^{-1}] = f_{T(U) \cap T^{-1}(V)}.$$

Demostración: Ejercicio. $\square$

Teorema 4 *El subgrupo conmutador $[[T]]'$ es finitamente generado si y sólo si (X, T) es un subshift.*

Demostración: Supongamos que $[[T]]'$ es finitamente generado. Sean $g_1, \cdots, g_n$ generadores de $[[T]]'$. Sea $\mathcal{P}$ una partición de abiertos cerrados de X tal que g_i restringida a cualquier átomo de $\mathcal{P}$ es igual a alguna potencia de T, para todo $1 \leq i \leq n$. Sea (Y, σ) el subshift de $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$ que resulta de codificar las órbitas de (X, T) según $\mathcal{P}$. Luego, la función $\pi : X \to Y$ definida por $\pi(x) = (\pi(x)_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ con $\pi(x)_k = A$ si y sólo si $T^k(x) \in A$ es un factor. Para probar que (X, T) es un subshift es suficiente mostrar que π es inyectiva. Para esto, definimos para cada $1 \leq i \leq n$, la función $f_i : Y \to Y$ como $f_i((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \sigma^k((x_n)_{n \in \mathbb{Z}})$, si $x_0 = A$ y si $g_i|_A = T^k$. Observar que $f_i \in [[\sigma]]$ y que $\pi \circ g_i = f_i \circ \pi$. Ahora, supongamos que $x \neq y \in X$ son tales que $\pi(x) = \pi(y)$. Sea $g \in [[T]]'$ tal que $g(x) \neq x$ y $g(y) = y$. Podemos tomar $g = f|_U$, con U una vecindad de x tal que y no está en el soporte de f_U. Por hipótesis, g se puede escribir como una palabra usando las funciones $g_1, \cdots, g_n$. Digamos $g = w(g_1, \cdots, g_n)$. Luego,

$$\begin{aligned} \pi(g(x)) &= \pi(w(g_1, \cdots, g_n)(x)) \\ &= w(f_1, \cdots, f_n)\pi(x) \\ &= \pi(w(g_1, \cdots, g_n)(y)) \\ &= \pi(g(y)) = \pi(y) = \pi(x). \end{aligned}$$

Como $g(x) = T(x)$ (pues $g = f|_U$ con U vecindad de x), lo anterior implica que $\sigma(\pi(x)) = \pi(x)$. La minimalidad de X implica minimalidad de Y, por lo tanto, la única posibilidad de que lo anterior sea cierto es que Y contenga un único elemento. Lo que no es posible pues siempre podemos escoger $\mathcal{P}$ con más de un átomo.

Supongamos que (X, T) es un subshift minimal, digamos $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$. Podemos suponer que para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ se tiene que $x_n \neq x_m$ si $|n - m| < 4$ (Por qué?). Probaremos que $[[T]]'$ está generado por la familia de funciones

$$\mathcal{M} = \{f_U : U = [a.bc], a, b, c \in \Sigma\},$$

donde $[a.bc]$ es el cilindro en X que fija las coordenadas $-1, 0$ y 1 con los símbolos a, b y c respectivamente. Gracias al Lema 5, es suficiente probar que para todo abierto cerrado, la función f_U está en el subgrupo generado por $\mathcal{M}$.
Para cada $a \in \Sigma$ se tiene $f_{T([.a])} = \prod_{b\in\Sigma} f_{[a.b]}$ y $f_{T^{-1}([a])} = \prod_{b\in\Sigma} f_{[.ba]}$. De esta forma, $f_{T([.a])}$, $f_{T^{-1}([.a])}$ y $\tau_{[.a]}$ están en el subgrupo generado por $\mathcal{M}$. El resto sigue del Lema 6. $\square$

Capítulo 5

Promediabilidad del grupo pleno topológico.

En este capítulo introduciremos la noción de promediabilidad de grupos, y enunciaremos el teorema demostrado por K. Juschenko y N. Monod en [10].

Bibliografía

[1] M. Boyle, *Topological orbit equivalence and factor maps in symbolic dynamics,* Ph.D. Thesis, University of Washington, Seattle (1983).

[2] Boyle, Mike; Tomiyama, Jun. *Bounded topological orbit equivalence and C*-algebras.* J. Math. Soc. Japan 50 (1998), no. 2, 317–329.

[3] S. Bezuglyi; K. Medynets. *Full groups, flip conjugacy, and orbit equivalence of Cantor minimal systems.* Colloqium Mathematicum 110 (2008), no. 2, 409–429

[4] Cortez, M. Isabel; Medynets, Konstantin. *On Virtual Conjugacy of Generalized Odometers.* Preprint.

[5] Cortez, M. Isabel; Petite, Samuel. *G-odometers and their almost 1-1 extensions.* J. London Math. Soc. (2) 78 (2008) 1–20.

[6] Giordano, Thierry; Putnam, Ian F.; Skau, Christian F. Full groups of Cantor minimal systems. Israel J. Math. 111 (1999), 285–320.

[7] De Cornulier, Yves. *Groupes pleins-topologiques (d'aprs Matui, Juschenko, Monod,).* Astérisque No. 361 (2014), Exp. No. 1064, viii, 183–223.

[8] Glasner, E; Weiss,B. *Weak orbit equivalence of Cantor minimal systems.* Internat. J. Math. 6 (4), (1995), 559–579.

[9] Juschenko, Kate. *A companion to the mini-course on full topological groups of Cantor minimal.* http://www.math.northwestern.edu/ juschenk/files/Juschenko-Course.pdf

[10] Juschenko, Kate; Monod, Nicolas. *Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups.* Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 2, 775–787.

[11] Medynets, Konstantin. *Reconstruction of orbits of Cantor systems from full groups.* Bull. Lond. Math. Soc. 43 (2011), no. 6, 1104–1110.

[12] Quiroz, Igraine. *Grupo pleno topológico pequeño asociado a un sistema minimal de Cantor.* Tesis del Magister en Ciencia mención Matemática de la Universidad de Santiago de Chile.